

EFEECTO PELICULAR (Skin)

Introducción

El fenómeno se caracteriza por una distribución no uniforme de la corriente que circula por los conductores. Su importancia está directamente relacionada con la frecuencia de operación, la permeabilidad del medio y la geometría. En las líneas de transporte de energía, el fenómeno se traduce en un aumento de la resistencia eléctrica de los conductores, llegando a superar la resistencia en corriente continua en un 6 a 7% como máximo.

Analizaremos el fenómeno desde una visión general, de manera de poder pesar adecuadamente las variables intervinientes.

Efecto pelicular en un conductor cilíndrico

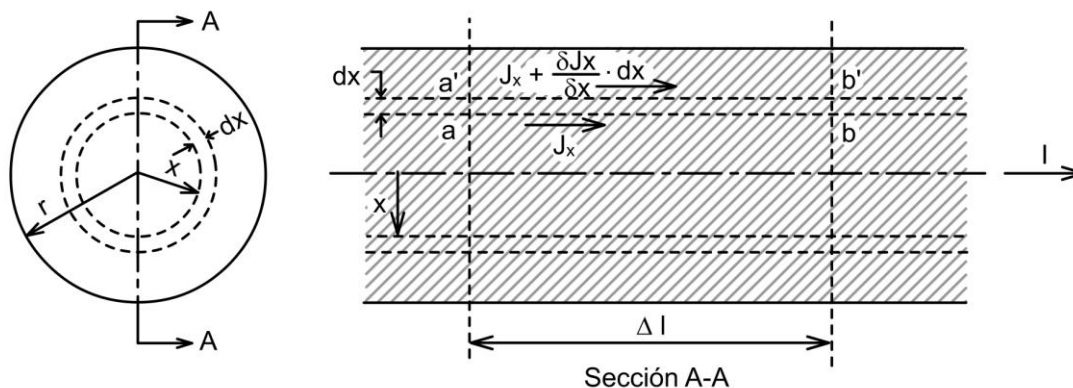


Fig 1

Partimos de la hipótesis de que la densidad de corriente no es uniforme en el interior del conductor y que varía desde el centro del conductor hacia la periferia. Para determinar la ley de variación de densidad de corriente, plantearemos, a partir de las conocidas leyes del electromagnetismo algunas expresiones que relacionadas nos resolverán el problema. Concretamente arribaremos a una función que nos da la densidad de corriente en función de la distancia al centro del conductor.

Partimos de la conocida expresión:

$$\int Hx \cdot dl = N \cdot I$$

Observando el corte transversal del conductor en la Fig.1, hacemos la circulación del vector campo magnético a lo largo de una línea cerrada ubicada a una distancia x del centro del conductor, resultando:

$$2 \cdot \pi \cdot x \cdot Hx = Ix \Rightarrow Hx = \frac{Ix}{2 \cdot \pi \cdot x} \quad (1) \quad \text{donde } Ix \text{ es la corriente que circula por el tubo de radio } x$$

En valores instantáneos tenemos:

$$h_x = \frac{ix}{2 \cdot \pi \cdot x} \quad (2)$$

$$\text{o también: } \operatorname{Re}(\sqrt{2} \cdot H_x \cdot e^{j\omega t}) = \operatorname{Re} \frac{\sqrt{2} \cdot I_x \cdot e^{j\omega t}}{2 \cdot \pi \cdot x} \quad (3)$$

Recordemos que:

$$i = \operatorname{Re}(\sqrt{2} \cdot I \cdot e^{j\omega t})$$

$$I = |I| \cdot L\alpha = I \cdot e^{j\alpha}$$

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$\therefore \operatorname{Re}(\sqrt{2} \cdot I \cdot e^{j\omega t}) = \sqrt{2} \cdot |I| \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

Vemos en consecuencia que el haber tomado la parte real (Re) del vector h_x nos permite independizarnos de la posición del vector, interesándonos solo por el valor instantáneo.

$$\text{Dividiendo m a m la (3) por raíz de 2 resulta: } H_x \cdot e^{j\omega t} = I_x \cdot \frac{e^{j\omega t}}{2 \cdot \pi \cdot x} \quad (4)$$

Definimos a continuación la densidad J_x de corriente como nueva variable dependiente de la distancia x al centro del conductor, resultando:

$$I_x = \int 2 \cdot \pi \cdot x \cdot J_x \cdot dx \quad (5)$$

Reemplazando la (5) en (4), resulta:

$$2 \cdot \pi \cdot x \cdot H_x \cdot e^{j\omega t} = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot e^{j\omega t} \cdot dx \quad (6)$$

Derivando parcialmente la (6) respecto de x

$$2 \cdot \pi \cdot \left[x \cdot \frac{\partial(H_x \cdot e^{j\omega t})}{\partial x} + H_x \cdot e^{j\omega t} \right] = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot J_x \cdot e^{j\omega t} \quad (7)$$

Dado que $e^{j\omega t}$ es independiente de x resulta:

$$2 \cdot \pi \cdot x \cdot e^{j\omega t} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial x} + 2 \cdot \pi \cdot e^{j\omega t} \cdot H_x = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot J_x \cdot e^{j\omega t} \quad (8)$$

Dividiendo m a m la (8) por $2 \cdot \pi \cdot x \cdot e^{j\omega t}$ obtenemos:

$$\boxed{\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{H_x}{x} = J_x} \quad (9)$$

La expresión (9) muestra que H_x y J_x son variables dependientes de x , y para eliminar H_x deberemos plantear otra ecuación y obtener finalmente una expresión de J_x en función de x .

La nueva ecuación surge de aplicar la segunda ley de Kirchoff a la espira indicada en la fig1 por los puntos a , a' , b' , b . En dicha espira se cumple que la fem inducida es igual a la suma de las caídas de tensión. En consecuencia tendremos:

$$\text{Recordemos que: } I = J \cdot A \text{ y } R_0 = \frac{\rho \cdot \Delta l}{A} \therefore I \cdot R_0 = J \cdot A \cdot \rho \cdot \frac{\Delta l}{A} = J \cdot \rho \cdot \Delta l$$

En consecuencia las caídas de tensión valdrán:

$$\text{Caída de tensión en } ab = J_x \cdot e^{j\omega t} \cdot \rho \cdot \Delta l \quad (10)$$

$$\text{Caída de tensión en } a'b' = \left[J_{x_{\max}} \cdot e^{j\omega t} + \frac{\partial}{\partial x} (J_{x_{\max}} \cdot e^{j\omega t}) \cdot dx \right] \cdot \rho \cdot \Delta l \quad (10)$$

Sumando las caídas de tensión e igualando a la fem inducida, resulta:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \Delta l \cdot \left[J_{x_{\max}} \cdot e^{j\omega t} + \frac{\partial}{\partial x} (J_{x_{\max}} \cdot e^{j\omega t}) \cdot dx \right] - \rho \cdot \Delta l \cdot J_{x_{\max}} \cdot e^{j\omega t} &= \rho \cdot \Delta l \cdot \frac{\partial}{\partial x} (J_{x_{\max}} \cdot e^{j\omega t}) \cdot dx \\ \therefore \rho \cdot \Delta l \cdot \frac{\partial}{\partial x} (J_{x_{\max}} \cdot e^{j\omega t}) \cdot dx - \frac{\partial \phi}{\partial t} &= 0 \quad (11) \end{aligned}$$

El flujo es función del tiempo y de la distancia x al elemento tubular

$$\phi = B x_{\max} \cdot e^{j\omega t} \cdot \Delta l \cdot dx = \mu \cdot H x_{\max} \cdot e^{j\omega t} \Delta l \cdot dx \quad (12)$$

Reemplazando (12) en (11) tendremos:

$$\rho \cdot \Delta l \cdot \frac{\partial}{\partial x} (J_{x_{\max}} \cdot e^{j\omega t}) \cdot dx - \frac{\partial}{\partial t} (\mu \cdot H x_{\max} \cdot e^{j\omega t} \cdot \Delta l) \cdot dx = 0 \quad (13)$$

Suponiendo que μ es constante, que $H x_{\max}$ no es función del tiempo y que $e^{j\omega t}$ no es función de x , derivaremos el segundo término de (13) respecto de t , resultando:

$$\rho \cdot \Delta l \cdot e^{j\omega t} \cdot \frac{\partial J_{x_{\max}}}{\partial x} - j\omega \cdot \Delta l \cdot \mu \cdot e^{j\omega t} \cdot H x_{\max} = 0 \quad (14)$$

Dividiendo m a m por $e^{j\omega t} \cdot \sqrt{2}$ para obtener los valores eficaces y despejando H_x obtendremos:

$$H_x = -\frac{j\rho}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial J_x}{\partial x} \quad (15)$$

reemplazando (15) en (9) y multiplicando m a m por $\frac{j\omega\mu}{\rho}$

$$-\frac{j\rho}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial^2 J_x}{\partial x^2} - \frac{j\rho}{\omega\mu x} \cdot \frac{\partial J_x}{\partial x} = J_x \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 J_x}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial J_x}{\partial x} - \frac{j\omega \cdot \mu}{\rho} \cdot J_x = 0 \quad (17)$$

Las derivadas parciales de (17) se pueden cambiar a totales, ya que las únicas variables independiente y dependiente son respectivamente x, y Jx.

Jx como puede observarse en la (17) es una función compleja. La distancia radial x debe considerarse como la componente real de una variable compleja.

La (17) es una forma especial de la ecuación de Bessel y es análoga a la siguiente expresión de variables reales:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + k^2 \cdot y = 0 \quad (18)$$

Se puede plantear la solución de la (18) como una serie infinita de la siguiente forma:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_n \cdot x^n \quad (19)$$

Haciendo:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x + 12 \cdot a_4 \cdot x^2 + 20 \cdot a_5 \cdot x^3 + \dots \quad (20)$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{a_1}{x} + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 \cdot x + 4 \cdot a_4 \cdot x^2 + 5 \cdot a_5 \cdot x^3 + 6 \cdot a_6 \cdot x^4 + \dots \quad (21)$$

$$k^2 \cdot y = k^2 \cdot a_0 + k^2 \cdot a_1 \cdot x + k^2 \cdot a_2 \cdot x^2 + k^2 \cdot a_3 \cdot x^3 + k^2 \cdot a_4 \cdot x^4 + \dots \quad (22)$$

Sumando las expresiones (20), (21) y (22) y reemplazando en la (18) tendremos la solución.

Si al sumar sacamos factor común a las distintas potencias de x, veríamos que para que se cumpla la igualdad a cero, tendrían que ser cero todos los coeficientes de las distintas potencias de x, es decir:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0 \\
 2 \cdot a_2 + 2 \cdot a_2 + k^2 \cdot a_0 &= 0 \\
 6 \cdot a_3 + 3 \cdot a_3 + k^2 \cdot a_1 &= 0 \quad (23) \\
 12 \cdot a_4 + 4 \cdot a_4 + k^2 \cdot a_2 &= 0 \\
 20 \cdot a_5 + 5 \cdot a_5 + k^2 \cdot a_3 &= 0
 \end{aligned}$$

Vemos que todos los coeficientes de subíndice impar dependen de a_1 y como este es igual a cero, todos los impares son igual a cero. Por su parte todos los pares dependen de a_0 , por lo tanto:

$$a_2 = -\frac{k^2 \cdot a_0}{2^2} \quad a_4 = -\frac{k^4 \cdot a_0}{2^2 \cdot 4^2} \quad a_6 = -\frac{k^6 \cdot a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}$$

Reemplazando estos coeficientes en la (19), se obtiene para la solución la siguiente serie:

$$y = a_0 \cdot \left[1 - \frac{(k \cdot x)^2}{2^2} + \frac{(k \cdot x)^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{(k \cdot x)^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right] \quad (24)$$

La serie (24) se llama función Bessel de primera clase, orden cero y se representa por $J_0(k \cdot x)$.

Resolviendo la (17) en forma análoga y suponiendo que los coeficientes " a_i " han de ser complejos, tendríamos la siguiente solución.

$$\begin{aligned}
 k^2 &= -\frac{j\omega \cdot \mu}{\rho} \quad y = Jx \\
 Jx &= a_0 \cdot \left[1 + \frac{j\omega \cdot \mu}{\rho} \cdot \frac{x^2}{2^2} - \left(\frac{\omega \cdot \mu}{\rho} \right)^2 \cdot \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - j \left(\frac{\omega \cdot \mu}{\rho} \right)^3 \cdot \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right] \quad (25)
 \end{aligned}$$

Llamando: $m = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{\rho}}$ (26) y separando en términos reales e imaginarios resulta:

$$\begin{aligned}
 Jx &= a_0 \cdot \left[1 - \frac{(mx)^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{(mx)^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} + \dots \right] + ja_0 \cdot \left[\frac{(mx)^2}{2^2} - \frac{(mx)^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{(mx)^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} + \dots \right] \\
 (27)
 \end{aligned}$$

Llamando a las partes real e imaginaria: $\text{ber}(mx)$ y $\text{bei}(mx)$ que significan Bessel real y Bessel imaginario respectivamente, resulta:

$$J_x = a_0 \cdot (bermx + jbeimx) \quad (28)$$

El coeficiente a_0 se puede determinar conociendo al vector intensidad de corriente de corriente en la superficie; que será J_r , luego la (27) quedará:

$$J_x = J_r \cdot \frac{bermx + jbeimx}{bermr + jbeimr} \quad (29)$$

La expresión (29) nos permite calcular la densidad de corriente en un conductor cilíndrico en función de la distancia al centro del conductor.

Impedancia interna de un conductor cilíndrico

Es aquella debida a la resistencia interna y a los enlaces de flujo producidos por el flujo interior.

Podríamos explicar el fenómeno skin de la siguiente manera: Los filamentos virtuales de corriente que comprenden al conductor tienen la misma caída de tensión. Los centrales son abrazados por el flujo interior y el flujo exterior; en cambio los filamentos externos o superficiales solo son abrazados por el flujo externo al conductor. Por lo tanto la caída de tensión inductiva es mayor en el interior que en la superficie, y esto debe ser compensado con una mayor caída resistiva en la superficie, lo cual se logra aumentando la densidad de corriente en la superficie, ya que la resistencia en si misma como característica del material debería ser la misma.

La caída de tensión en un filamento cualquiera sin tener en cuenta los enlaces de flujo exterior es:

$$V_i = \rho \cdot J_r \left[\frac{V}{m} \right] \quad (30)$$

$$\text{Y la } Z_i: \quad Z_i = \frac{V_i}{I} = \frac{\rho \cdot J_r}{I} \left[\frac{\Omega}{m} \right] \quad (31)$$

Donde I es el vector corriente del conductor

$$\text{Recordando que } I = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot H_r \quad (32)$$

$$\text{De (15) y (26) obtenemos: } H_r = \frac{-j}{m^2} \cdot \left(\frac{dJ_x}{dx} \right)_{x=r} \quad (33)$$

Reemplazando en (33) el valor dado por la (29) tenemos:

$$H_r = -\frac{j}{m^2} \cdot \frac{J_r}{bermr + jbeimr} \cdot \left[\frac{d}{dx} (bermx + jbeimx) \right]_{x=r} \quad (34)$$

Llamando:

$$\text{ber}'mx = \frac{d}{d(mx)}(\text{ber}mx) = \frac{1}{m} \cdot \frac{d}{dx}(\text{ber}mx) \quad (35)$$

$$\text{bei}'mx = \frac{d}{d(mx)}(\text{bei}mx) = \frac{1}{m} \cdot \frac{d}{dx}(\text{bei}mx) \quad (36)$$

Reemplazando la (34) en (32) y esta última en (31), resulta finalmente:

$$Z_i = \frac{V_i}{I} = \frac{\rho \cdot m}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \frac{\text{ber}mr + j\text{bei}mr}{\text{bei}'mr - j\text{ber}'mr} \left[\frac{\Omega}{m} \right] \quad (37) \quad (*)$$

La (37) nos permite calcular la impedancia interna Z_i de un conductor a cualquier frecuencia, conociendo la permeabilidad y la resistividad del material.

Donde: ρ debe expresarse en $\text{ohm}\cdot\text{m}$ y la permeabilidad relativa debe multiplicarse por la absoluta $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$

Relación entre la resistencia con efecto piel y sin él

La parte real de la expresión compleja de Z_i es la resistencia efectiva; la cual se puede encontrar racionalizando la (37) y siendo la resistencia en corriente continua:

$$R_0 = \frac{\rho}{A} = \frac{\rho}{\pi \cdot r^2} \left[\frac{\Omega}{m} \right]$$

Resulta la siguiente relación entre la resistencia efectiva y la R_0 :

$$\frac{R}{R_0} = \frac{m \cdot r}{2} \cdot \frac{\text{ber}mr \cdot \text{bei}'mr - \text{bei}mr \cdot \text{ber}'mr}{(\text{bei}'mr)^2 + (\text{ber}'mr)^2} \quad (38)$$

Siendo:

$$m \cdot r = r \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{\rho}} = r \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r}{\rho}} = \sqrt{\frac{8 \cdot \pi \cdot f \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r}{\frac{\rho}{\pi \cdot r^2}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{R_0} \cdot \mu_r \cdot f}$$

(39)

En unidades métricas la (39) queda:

$$m \cdot r = 15,84 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{\mu_r \cdot f}{R_0}} \quad (40)$$

$$R_0 = \frac{\Omega}{m}$$

La relación $\frac{R}{R_0}$ se puede observar en la Fig.2, donde vemos que para la frecuencia industrial los valores máximos que puede alcanzar no superan el 8% de la resistencia en corriente continua.

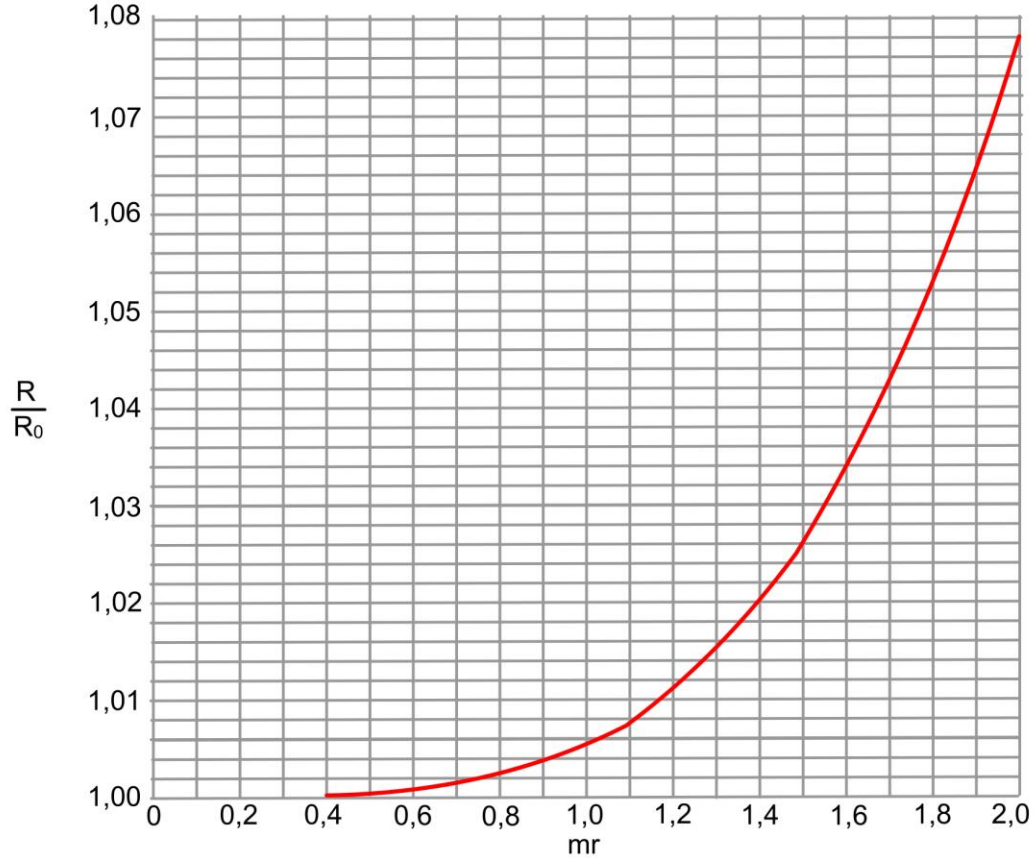


Fig. 2

Relación de inductancia interna con efecto piel y sin él

La parte imaginaria de la impedancia interna Z_i a la cual hicimos mención anteriormente, será la reactancia inductiva interna.

Racionalizando la (37) y tomando la parte imaginaria, resulta:

$$\omega \cdot L_i = \frac{\rho \cdot m}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \frac{\text{be}i\text{mr} \cdot \text{be}i\text{mr} + \text{bermr} \cdot \text{bermr}}{(\text{be}i\text{mr})^2 + (\text{bermr})^2} \left[\frac{\Omega}{m} \right] \quad (41)$$

Recordemos que la inductancia interna de un conductor, suponiendo una distribución uniforme de la corriente vale:

$$L_{i0} = \frac{\mu}{8 \cdot \pi} \left[\frac{H}{m} \right] \quad (42)$$

Relacionando (41) y (42) resulta:

$$\frac{L_i}{L_{i0}} = \frac{4}{m \cdot r} \cdot \frac{\text{beimr} \cdot \text{beímr} + \text{bermr} \cdot \text{berímr}}{(\text{beímr})^2 + (\text{berímr})^2} \quad (43)$$

La relación (43) tiende a la unidad cuando f tiende a cero (Fig. 3).

Cuando calculamos las constantes de una línea y en especial r y x debemos corregirlos de acuerdo a lo que hemos visto, es decir que el efecto piel hace aumentar la resistencia efectiva de un conductor y disminuir la reactancia inductiva interna.

(*) Justificación de la expresión (37)

$$\text{De la (31)} \quad Z_i = \frac{V_i}{I} = \frac{\rho \cdot J_r}{I} \left[\frac{\Omega}{m} \right]$$

Y recordando que:

$$I = \int H \cdot dl \Rightarrow I = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot H_r \quad \therefore Z_i = \frac{\rho \cdot J_r}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot H_r}$$

Además de la (15)

$$H_x = \frac{-j\rho}{\omega \cdot \mu} \cdot \frac{\partial J_x}{\partial x} \quad \text{y recordando también que:} \quad m = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{\rho}} \quad \therefore m^2 = \frac{\omega \cdot \mu}{\rho}$$

Luego:

$$H_{x/x=r} = H_r = \frac{-j}{m^2} \cdot \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} \right)_{x=r} \quad \text{y recordando de la (29)} \quad J_x = J_r \cdot \frac{\text{bermx} + j\text{beimx}}{\text{bermr} + j\text{beimr}}$$

Reemplazando y derivando resulta:

$$H_r = \frac{-j}{m^2} \cdot \frac{J_r}{\text{bermr} + j\text{beimr}} \cdot \left[\frac{d}{dx} (\text{bermx} + j\text{beimx}) \right]_{x=r}$$

Y Llamando:

$$\text{berímx}/_{x=r} = \frac{d(\text{bermx})}{d(mx)} = \frac{1}{m} \cdot \frac{d}{dx} (\text{bermx})/_{x=r}$$

$$\text{beímx}/_{x=r} = \frac{d(\text{beimx})}{d(mx)} = \frac{1}{m} \cdot \frac{d}{dx} (\text{beimx})/_{x=r}$$

Reemplazando en H_r , resulta:

$$H_r = \frac{-j}{m^2} \cdot J_r \cdot \frac{m \cdot (\text{berímr} + j\text{beímr})}{\text{ber}(mr) + j\text{bei}(mr)}$$

Simplificando y reemplazando en la expresión de Z_i tendremos finalmente la expresión (37)

$$Z_i = \frac{\rho \cdot J_r}{2 \cdot r \cdot H_r} = \frac{\rho \cdot J_r}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \frac{\text{ber}(mr) + j\text{bei}(mr)}{\frac{-j}{m} \cdot J_r \cdot (\text{ber}'mr + j\text{bei}'mr)} = \frac{\rho \cdot m}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \frac{\text{ber}mr + j\text{bei}mr}{\text{bei}'mr - j\text{ber}'mr}$$

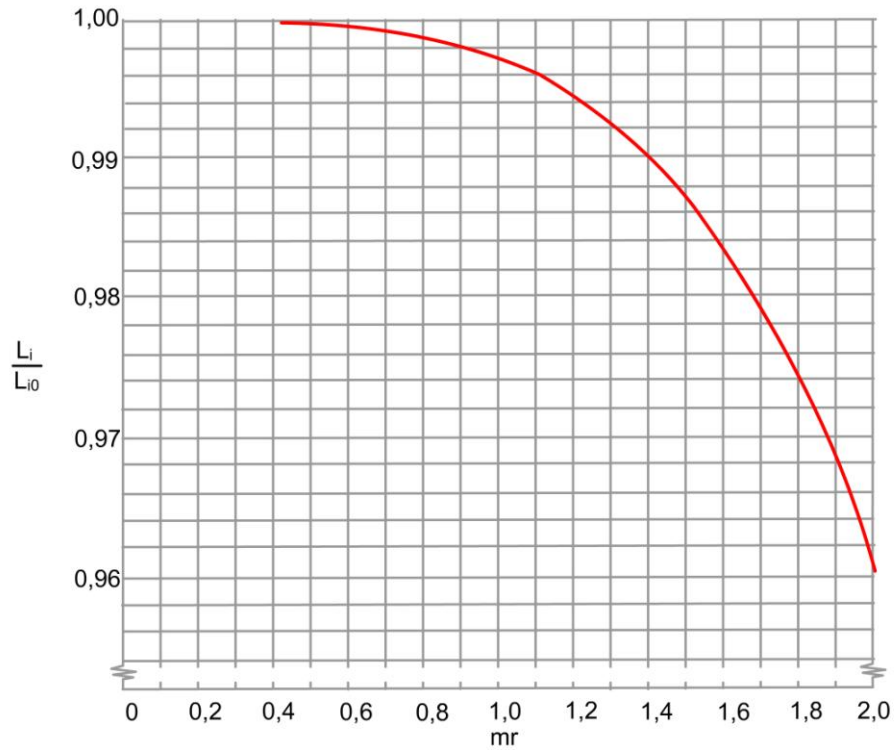


Fig. 3

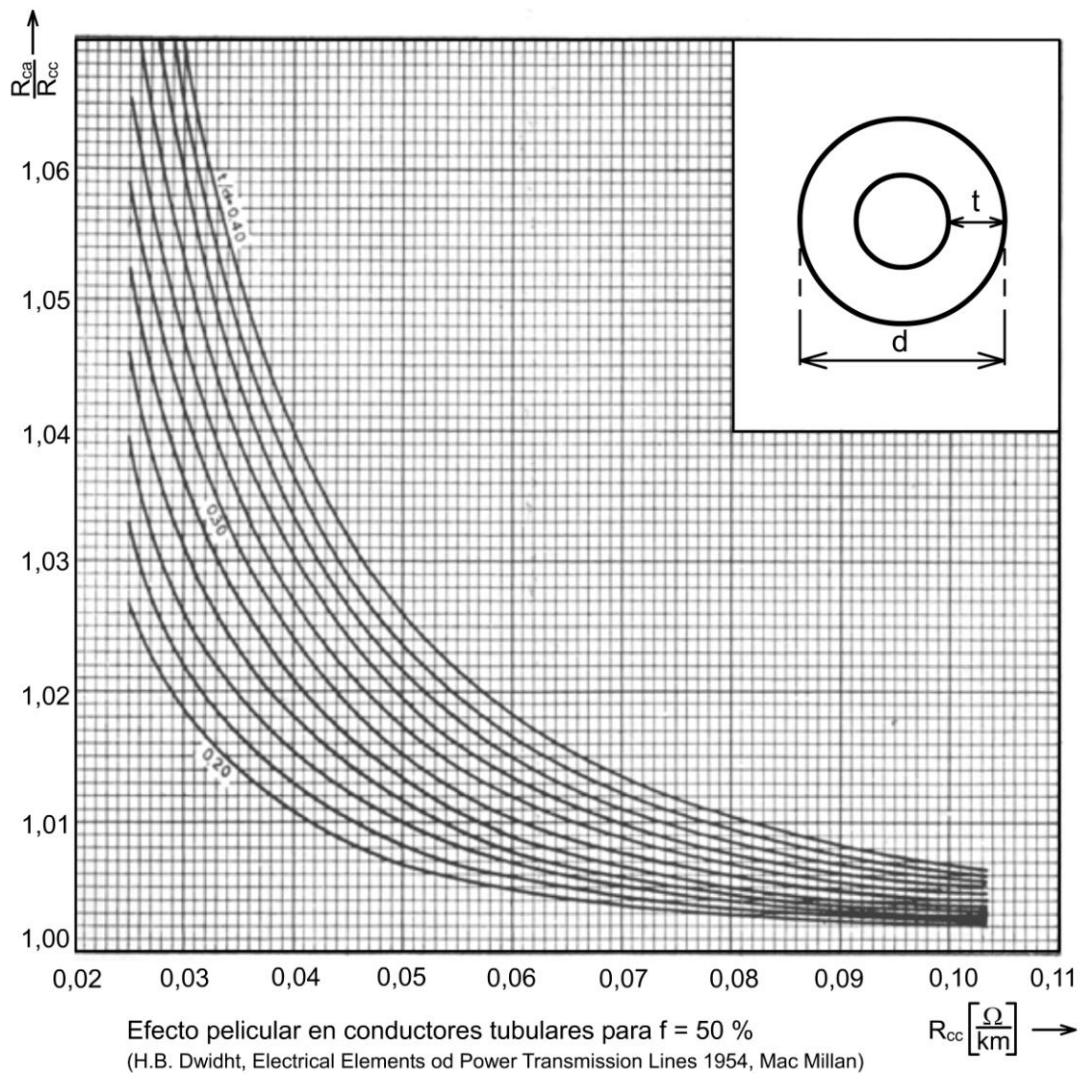


Fig. 4

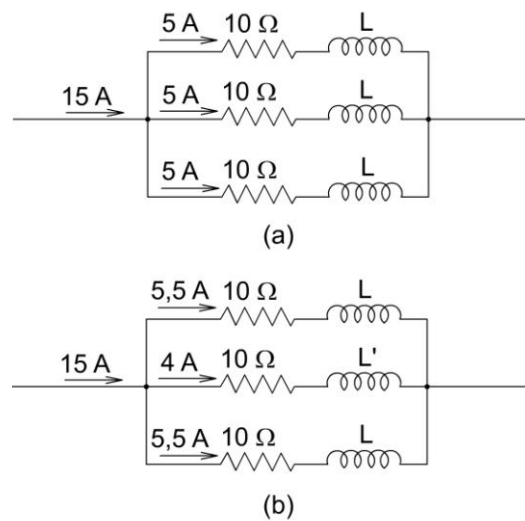


Fig. 5

La Fig. 5-a muestra imaginariamente la distribución de corriente por tres filetes de corriente ubicados uno en el centro del conductor y los otros dos en la periferia, suponiendo que la distribución de corriente es uniforme.

Si la resistencia de cada filete fuera de 10 ohm, la pérdida total de potencia sería:

$$3 \cdot 5^2 \cdot 10 = 750 \text{ W}, \text{ lo cual se traduciría en una resistencia equivalente del conjunto de } \frac{750}{15^2} = 3,33 \Omega$$

La Fig. 5-b muestra la distribución de corrientes cuando por el filete central circula menos corriente debido al aumento de la inductancia del filete central.

En este caso la pérdida de potencia total será: $2 \cdot 5 \cdot 5^2 \cdot 10 + 4^2 = 765 \text{ W}$, lo cual se traduciría en una resistencia equivalente del conjunto de $\frac{765}{15^2} = 3,40 \Omega$.

La inductancia colocada en la rama central defasa la corriente de dicha rama respecto a las otras dos. Por lo tanto para que la suma de 15 A, la corriente de la rama central tendrá que ser algo mayor que 4 A y esto hará que la resistencia efectiva sea algo mayor aún que 3,4 ohm.